數學傳播　50卷2期, pp. 3-23

畢氏定理的三角學證明: III
純三角學的證明

冼鏡光

本系列第一篇文章 [15] 提到 Elisha Scott Loomis 的一本名著 *The Pythagorean Proposition* [11], 這本書的第一版是 1927 年、第二版是 1940 年。這本書收集了許多畢氏定理的證明, 一個流行說法是 370 個, 筆者沒仔細算過, 因為 Loomis 自己有編號的最後一個證明是 256, 加四元數的證明 4 個、動力學的 2 個、魔方陣的 5 個、還有一些沒編號的。總之, 有編號的證明有 267 個, 但我湊不足 370 這個數。

Loomis 這本書被很廣泛引用、但筆者覺得很多引用這本書的人可能沒看過或沒仔細看過這本書, 因為有不少人云亦云的錯誤「引用」。以下我們用 1940 年版討論、因為很容易在網上下載, 1927 年版在網上也有、但內容比較少。Loomis 這本書的第 244 頁有個十分大膽的說法 (兩版都有), 在圖 1 中有「沒有三角學證明」的標題, 並且鐵口直斷地說三角學中所有基本式子都是基於畢氏定理為真而得, 於是有畢氏定理才有三角學。

> NO TRIGONOMETRIC PROOFS
>
> Facing forward the thoughtful reader may raise the question: Are there any proofs based upon the science of trigonometry or analytical geometry?
>
> There are no trigonometric proofs, because all the fundamental formulae of trigonometry are themselves based upon the truth of the Pythagorean Theorem; because of this theorem we say $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, etc. Triginometry *is* because the Pythagorean Theorem *is*.

圖 1: Loomis [11, 第 244 頁] 書中的大膽說法

在第一篇中我們看到不少用三角學證明畢氏定理或畢氏等式的方式, 所以 Loomis 說所有三角學的基本式子是基於畢氏定理是不正確的。延續第一篇的脈絡, 本篇不用畢氏定理或畢氏等式證明三角學中的重要式子、因而再次否定 Loomis 的說法。我們列出三角學的基本等式 (第 1 節)、積化和與和化積等式 (第 2 節)、倍角等式 (第 3 節) 與半角等式 (第 4 節)。我們會介紹一組不常在三角學課本中見到的 Mollweide 等式 (第 5 節), 並且提供若干證明, 從 Mollweide 等式到畢氏定理是顯而易見的。然後, 我們講解正弦定律 (第 6 節)、餘弦定律 (第 7

節) 和正切定律 (第 8 節), 這就把三角學中的重要式子都講過了, 而且都沒有用到畢氏定理和畢氏等式, 反而把這兩者視爲這些重要式子的結果。第 9 節另闢蹊徑, 使用連續函數和稠密集合的觀念證明畢氏等式, 沒用到什麼高深理論, 學過連續函數的讀者不難了解。

1. 三角學中重要等式

許多三角學課本會把畢氏等式很早就列出來, 因爲在單位圓中透過直角三角形和畢氏定理這是個顯而易見的結果。然後, 就用畢氏等式證明其它重要的等式, 這或許就是人們總是覺得三角學中重要結果來自畢氏定理或畢氏等式的原因。然而, 本系列第一篇中就提過 de Morgan 在 1849 年的三角學課本 [3] 採用和目前教科書不太相同的做法。事實上, 十九世紀下半到二次大戰之後的若干年, 固然一開始也會講到畢氏等式, 但後來的發展卻和目前的課本有相當大的差異, 一些課本會用投影 (projection) 的手法講解許多重要等式而不用畢氏等式, 有些課本 (特別是解析幾何) 在講座標旋轉時直接證明正弦和餘弦函數的角和與角差等式, 請參看本系列第一篇的講解和該文的參考文獻。

在三角學中非常重要的是正弦和餘弦函數的角和與角差公式, 以及由此而來的正弦和餘弦的倍角公式, 有些課本會用畢氏等式導出 $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$, 不過本文只用到 $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$。一些比較次要的還有正切函數的角和與角差等式, 以及由此而來的正切倍角等式; 其次是正弦、餘弦和正切函數的半角等式, 它們的證明都不需要用到畢氏定理和畢氏等式, 請看第一篇的說明。積化和以及和化積等式的證明也不必用畢氏定理和畢氏等式, 本文下一節就討論這一組等式, 半角等式也可以用積化和等式證明, 立即就得到畢氏等式。

綜合起來, 上述的三角學中重要等式都和畢氏定理與畢氏等式獨立、反而可以簡單地導出畢氏定理和畢氏等式。換言之, 本文是在反向操作, 把畢氏定理或畢氏等式用這些重要等式導出來、而不是透過畢氏定理或畢氏等式證明這些重要等式。

2. 和化積與積化和等式

從角和與角差等式可以導出積化和 (Product-to-Sum) 以及和化積 (Sum-to-Product) 等式。下面是正弦函數的角和與角差等式:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta), \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

把它們相加以及相減後就得到積化和等式:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))}{2},\ \cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))}{2}. \tag{1}$$

餘弦函數的角和與角差等式爲:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta), \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

相加以及相減後得到另一組積化和等式:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))}{2}, \ \sin(\alpha)\sin(\beta)=-\frac{(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))}{2}. \tag{2}$$

把第 (1) 式和第 (2) 改寫得到下面四道式子。

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta), \ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos(\alpha)\cos(\beta) \text{ 和 } \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

令 $p = \frac{\alpha+\beta}{2}$ 和 $q = \frac{\alpha-\beta}{2}$, 於是 $\alpha = \frac{p+q}{2}$ 和 $\beta = \frac{p-q}{2}$, 這樣就得到和化積等式。

$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right), \ \sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right),$$
$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right) \text{ 和 } \cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right).$$

和化積等式提供了一個證明 $\sin^2(x)+\cos^2(x)$ 是個常數的簡單方式。把兩個 $\sin(x)$ 的和化積等式相乘得到:

$$\begin{aligned}\sin^2(p)-\sin^2(q) &= \left(2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)\left(2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)\\ &= 4\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).\end{aligned}$$

把兩個 $\cos(x)$ 的和化積等式相乘得到:

$$\begin{aligned}\cos^2(p)-\cos^2(q) &= \left(2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)\left(-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)\\ &= -4\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).\end{aligned}$$

比較上面兩道式子可以看出:

$$\cos^2(p)-\cos^2(q) = -(\sin^2(p)-\sin^2(q)).$$

因此 $\sin^2(p)+\cos^2(p) = \sin^2(q)+\cos^2(q)$。因爲這對任何 p 與 q 都真, $\sin^2(x)+\cos^2(x)$ 是個常數; 因爲 $\sin(0)=0$ 以及 $\cos(0)=1$, 所以 $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$。

3. 倍角等式

正弦和餘弦函數的角差與角和公式並不需要用到畢氏定理和畢氏等式 (見 [15]), 因此倍角公式也和畢氏定理與畢氏等式獨立, 因爲角和公式中讓兩個角相等就行:

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x),$$
$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

把 $2x$ 換成 x 得到:

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right),$$
$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

把上面兩式平方後相加:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = \left(\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

反覆使用這個技巧代入, 我們得到:

$$\begin{aligned}\sin^2(x) + \cos^2(x) &= \left(\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \left(\sin^2\left(\frac{x}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{4}\right)\right)^4 \\ &\vdots \\ &= \left(\sin^2\left(\frac{x}{2^n}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{2^n}. \end{aligned} \tag{3}$$

這個結果指出, 給定一個角 x, 它的正弦和餘弦的平方和等於把角換成 $x/2^n$ 的正弦和餘弦的平方和的 2^n 次方。正因爲這道等式對任意 $n > 0$ 都成立, 我們可以算出 n 趨於無限大時的值, 這個值就是 x 的正弦和餘弦的平方和。所以, 證明畢氏等式相當於證明下式, 我們會在後續文章中做廣泛的探討:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\sin^2\left(\frac{x}{2^n}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{2^n} = 1. \tag{4}$$

證明上式既可以直接計算極限、也可以用 L'Hôpital 法則。

4. 半角等式

我們用積化和等式導出半角公式。下面第一式把 $\sin^2(x)$ 寫成 $\sin(x)\sin(x)$, 再用積化和等式; 第二式則是把 $\cos^2(x)$ 寫成 $\cos(x)\cos(x)$。

$$\sin^2(x) = \sin(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\left(\cos(x+x) - \cos(x-x)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right),$$
$$\cos^2(x) = \cos(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+x) + \cos(x-x)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right).$$

很明顯地, 把 $\sin^2(x)$ 和 $\cos^2(x)$ 相加得到 1。把 x 換成 $x/2$、再開方就是半角等式了:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}},$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}.$$

5. Mollweide 等式

已知一個角爲 α、β 和 γ, 對邊分別是 a、b 和 c 的三角形。Mollweide 等式很巧妙地把三條邊和三個角用正弦與餘弦函數連結起來 [12]。Mollweide 等式一共有兩道式子如下:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \quad \text{和} \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

因爲三條邊一共有六個不同的置換 (permutation): $a-b-c$、$a-c-b$、$b-a-c$、$b-c-a$、$c-a-b$ 和 $c-b-a$。任何一個置換代入邊的左式、右邊角的部份也做相應的調整, 我們會有六組 Mollweide 等式; 譬如在 $b-c-a$ 的情況下, 我們會有:

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{和} \quad \frac{b+c}{a} = \frac{\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

根據 Wu [19] 的考證, Mollweide 等式並非由 Mollweide 首創, 在 Mollweide 之前就有人做出相同的結果, 或許在 19 世紀初期出版資訊流通並不發達, Mollweide 的文章並沒有引用在他之前的作品。很有意思的是, 雖然 Mollweide 等式簡單、而且證明也不難, 近代三角學教科書中卻很少討論它, 所以本文略做介紹應該是件很有意義的事。另外, Mollweide 等式中的第二式也叫做 Newton (牛頓) 等式, 因爲它出現在 Newton 的著作中。Karjanto [8] 是一篇 Mollweide 等式在三角學教學方面的討論。

接下來, 第 5.1 節用正弦定律證明 Mollweide 等式, 正弦定律和畢氏定理和畢氏等式獨立 (第 6 節); 第 5.2 節討論一個仍然使用正弦定律的幾何證明; 第 5.3 節說明如何不用正弦定律; 第 5.4 節用 Mollweide 等式證明畢氏定理。

5.1. 使用正弦定律的簡單證明

因爲Mollweide 等式使用到三角函數, 它的證明也必然會用到三角函數。從已知條件, 正弦定律指出下式爲真, 此地常數k爲三角形外接圓直徑:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = k.$$

從上式得到

$$a = k\cdot\sin(\alpha), \quad b = k\cdot\sin(\beta) \quad \text{和} \quad c = k\cdot\sin(\gamma).$$

透過和化積等式 (第 2 節), 我們得到 $a-b$ 和 $a+b$ 如下:

$$a-b=k\left(\sin(\alpha)-\sin(\beta)\right)=2k\left[\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right],$$
$$a+b=k\left(\sin(\alpha)+\sin(\beta)\right)=2k\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right].$$

對 γ 使用倍角公式, 得到 $c=2k\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$。因此 $\frac{a-b}{c}$ 和 $\frac{a+b}{c}$ 爲:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\quad 和\quad \frac{a+b}{c}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

因爲 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{180^\circ-\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$, 得到 $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ 以及 $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$。代入 $\frac{a-b}{c}$ 和 $\frac{a+b}{c}$ 的式子就得到 Mollweide 等式:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)},$$
$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

5.2. 幾何證明

本節討論一個幾何式的證明, 也用到正弦定律, 下一節稍許修改就可以避開正弦定律。我們需要考慮 $a>b$ (圖 2(a)) 和 $a<b$ (圖 2(b)) 兩種情況, 這兩者基本上並沒有太大差異、重點是在於若干角的度量在兩種情況下的差異。

用 C 爲圓心、$b=\overline{CA}$ 爲半徑作圓和另一邊 $\overleftrightarrow{CB}$ 在 D 和 E 相交。若 $a>b$, 令 D 在 B 和 C 之間 (圖 2(a)); 若 $a<b$, D 在 $\overline{BC}$ 之外, 爲方便起見, 令順序爲 C、B 和 D (圖 2(b))。因爲 $\triangle CAD$ 和 $\triangle CAE$ 是等腰三角形, 我們有 $\angle CAD=\angle CDA=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$ 和 $\angle CAE=\angle CEA=\frac{\gamma}{2}$。因爲 $\overline{DE}$ 是直徑, $\triangle DAE$ 是直角三角形、$\angle DAE=90^\circ$。

在 $a>b$ 的情況下, $\overline{DB}=a-b$ 且 $\overline{BE}=a+b$。我們對 $\triangle DBA$ 使用正弦定律, 所以需要知道 $a-b$ 和 c 的對角 $\angle BAD=\theta$ 和 $\angle BDA$。$\angle BDA$ 是 $180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$, 而 θ 則是:

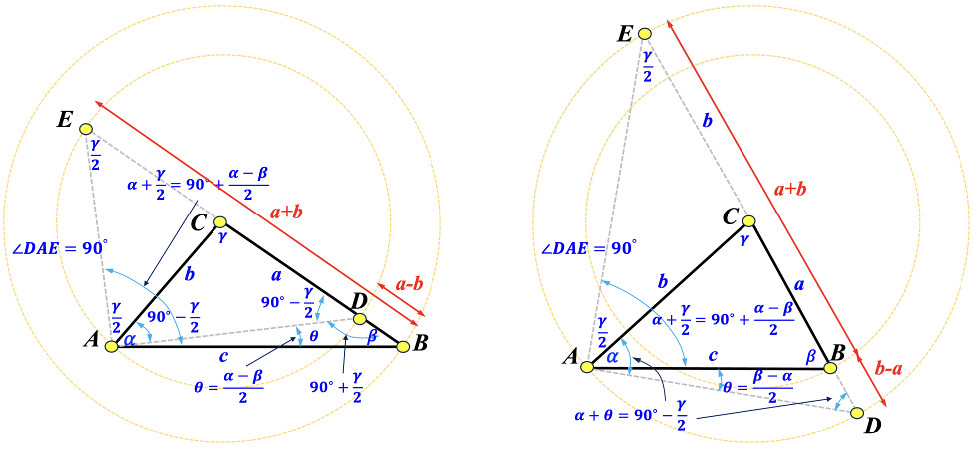
$$\theta=\angle BAD=\alpha-\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{2\alpha-180^\circ+\gamma}{2}$$
$$=\frac{\alpha+(\alpha+\gamma)-180^\circ}{2}=\frac{\alpha+(180^\circ-\beta)-180^\circ}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

因此對 $\triangle BDA$ 而言, 正弦定律指出:

$$\frac{a-b}{\sin(\theta)}=\frac{c}{\sin(\angle BDA)}.$$

化簡後得到第一道 Mollweide 等式:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin(\theta)}{\sin(\angle BDA)}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ+\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$



(a) $a>b$　　(b) $a<b$

圖 2: Mollweide 等式的幾何證明: 仍然使用正弦定律

第二道式子的證明是類似的, 因爲需要 $a+b$ 和 c 的比值, 我們得用 $\triangle BAE$。c 的對角爲 $\frac{\gamma}{2}$, $a+b$ 的對角爲 $\angle BAE=\alpha+\frac{\gamma}{2}$, 它可以改寫如下:

$$\angle BAE=\alpha+\frac{\gamma}{2}=\frac{2\alpha+\gamma}{2}=\frac{\alpha+(\alpha+\gamma)}{2}=\frac{\alpha+(180^\circ-\beta)}{2}=90^\circ+\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

於是得到

$$\frac{c}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{a+b}{\sin(\angle BAE)}=\frac{a+b}{\sin\left(90^\circ+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\frac{a+b}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}.$$

這就是第二式的結果。

再看 $a<b$ 的情況 (圖 2(b))。和 $a>b$ 的情況相同, 我們得在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle BAE$ 上使用正弦定律。對 $\triangle BAD$ 而言, 我們要知道 $b-a$ 和 c 的比值, 因此用到 $\angle BDA=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$, 而 $\angle BAD=\theta=\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)-\alpha$ 則是

$$\theta=\angle BAD=\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)-\alpha=\frac{180^\circ-\gamma-2\alpha}{2}=\frac{(180^\circ-(\alpha+\gamma))-\alpha}{2}=\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

於是正弦定律指出:

$$\frac{b-a}{\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}=\frac{c}{\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

所以我們得到:

$$\frac{b-a}{c}=\frac{\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

然後使用 $-\sin(x)=\sin(-x)$ 就得到期望的結果:

$$\frac{a-b}{c}=-\frac{b-a}{c}=-\frac{\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{-\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

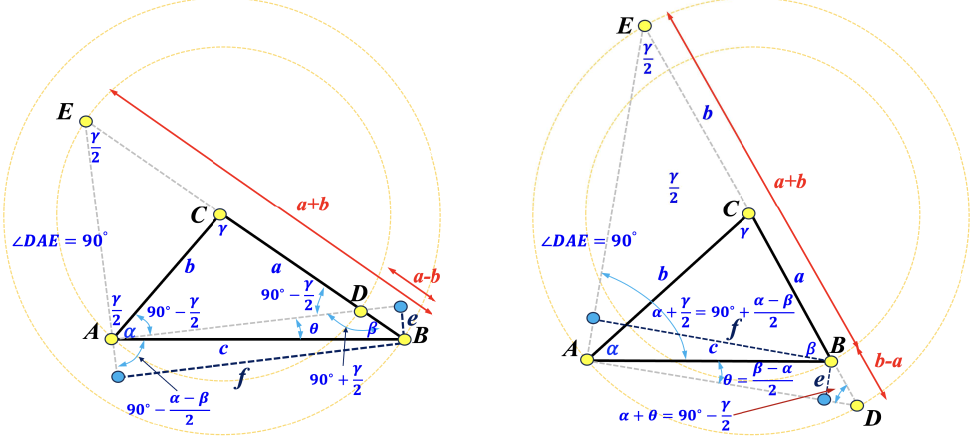
接著我們證明第二道式子。第二道式子的證明用到 $\triangle BAE$ 中的 $a+b=\overline{BE}$ 和 $c=\overline{BA}$, 它們的對角分別是 $\angle BAE=\alpha+\frac{\gamma}{2}=90^\circ+\frac{\alpha-\beta}{2}$和$\frac{\gamma}{2}$。正弦定律告訴我們:

$$\frac{c}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{a+b}{\sin(\angle BAE)}=\frac{a+b}{\sin\left(90^\circ+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\frac{a+b}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}.$$

這樣就證明了第二道等式。

5.3. 不用正弦定律

本節提供一個不用正弦定律的證明。使用正弦定律的原因, 主要是它很容易可以找出 $\frac{a-b}{c}$ 和 $\frac{a+b}{c}$ 這兩個比值, 但若仔細些我們可以找到一個媒介值、因而避開正弦定律。



(a) $a>b$　　(b) $a<b$

圖 3: Mollweide 等式的幾何證明: 不用正弦定律

這個媒介十分簡單。從 B 往 $\overleftrightarrow{AD}$ 和 $\overleftrightarrow{AE}$ 作垂線, 令距離分別是 e 和 f, 這兩者就是媒介。在 $a>b$ 的情況下 (圖 3(a)), 我們注意到 $e=\overline{DB}\cdot\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=(a-b)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, 而且 $e=c\cdot\sin(\theta)=c\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$。因此, 我們得到:

$$(a-b)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=e=c\cdot\sin(\theta)=c\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

這樣第一道式子不用正弦定律的證明就有了。

第二道式子用到 f。我們看到 $f = (a+b)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ 而且 $f = c\cdot\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = c\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ 所以, 最後的結果是:

$$(a+b)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = f = c\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

這是 Mollweide 的第二道等式。$a < b$ 的情況是類似的 (圖 3(b)), 就不重複了。

5.4. 從 Mollweide 等式到畢氏定理

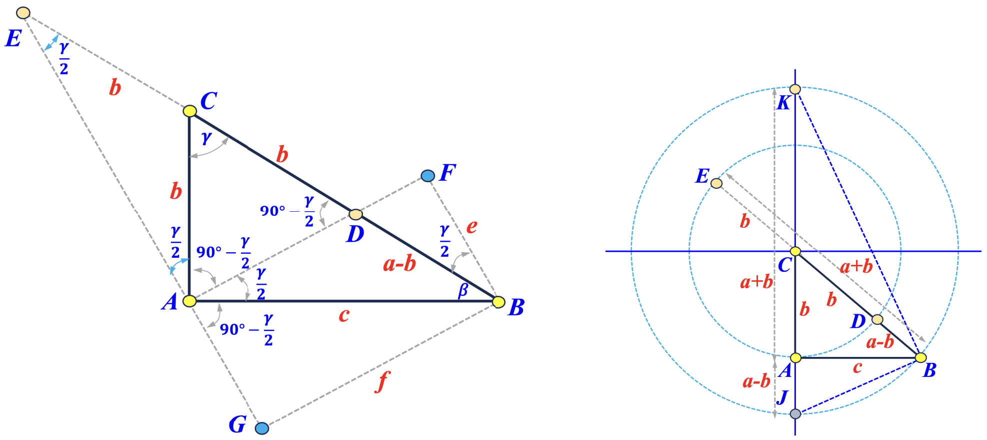
Mollweide 等式提供了一個極爲簡單的畢氏定理證明。我們假設 $\alpha = 90^\circ$, 於是 $\alpha - \beta = 90^\circ - \beta = \gamma$, 代入 Mollweide 等式得到

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{90^\circ-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)},$$
$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{90^\circ-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

兩者相乘結果爲 1:

$$\frac{a-b}{c}\cdot\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = 1.$$

於是得到 $a^2 - b^2 = c^2$, 也就是 $a^2 = b^2 + c^2$。



(a) 幾何證明　　(b) 捷徑

圖 4: 從 Mollweide 等式到畢氏定理

上一節的幾何證明可以直接轉換成一個畢氏定理的證明。因爲斜邊大於兩個直角邊, 因此這是個 $a > b$ 的情況 (圖 3(a)), 我們把該圖中不需要的部分去掉、重新畫一次, 這就是圖 4(a)。

從圖可以看出下面的結果, 兩式相乘再化簡就得到畢氏定理。

$$(a-b)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=e \quad = \quad c\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$
$$(a+b)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=f \quad = \quad c\cdot\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=c\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

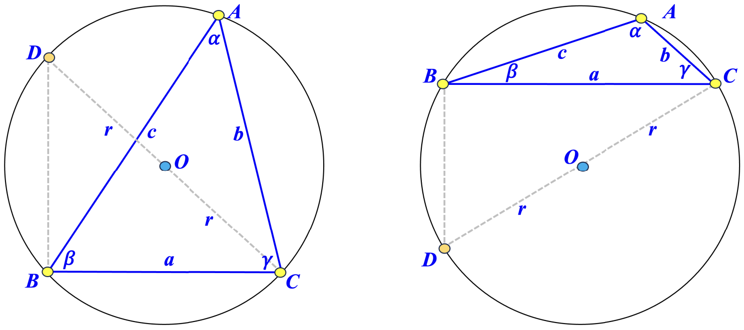
到目前爲止, 有關 Mollweide 等式的幾何證明都在造出 $a-b$ 和 $a+b$, 一旦瞭解這個觀念, 我們可以找到其它跳過三角學更直接的證明。請看圖 4(b)。以 C 爲圓心 b 爲半徑的圓和 $\overleftrightarrow{BC}$ 在 D 和 E 相交, 我們前面看過, $a-b=\overline{BD}$ 而且 $a+b=\overline{BE}$。更重要的是, $\overleftrightarrow{AB}$ 和這個圓在 A 相切, 因爲 $\angle BAC=90°$。於是切割線定理 (Tangent-Secant Theorem) 告訴我們 $\overline{BD}\cdot\overline{BE}=\overline{BA}^2$, 也就是 $(a-b)(a+b)=c^2$, 於是 $a^2=b^2+c^2$。

以 C 爲圓心 a 爲半徑的圓和另一邊 $\overleftrightarrow{AC}$ 在 J 和 K 相交, 因此 $a-b=\overline{AJ}$ 和 $a+b=\overline{AK}$, 又因爲 $\overline{JK}$ 是直徑故 $\angle JBK$ 爲直角、而 $\overline{AB}$ 是斜邊上的高, 所以 $\overline{AJ}\cdot\overline{AK}=\overline{AB}^2$, 這也得到 $(a-b)(a+b)=c^2$、當然就是 $a^2=b^2+c^2$。

我們在第一篇第 7.3 節介紹過 Lengvárszky [10] 用正切角和與角差等式證明畢氏定理 [15], 也解釋了正切角和與角差等式並不需要用到畢氏定理和畢氏等式, 本節從 Mollweide 等式引導出來的證明卻簡捷得多。

6. 正弦定律

本節不用畢氏定理或畢氏等式證明正弦定律, 我們以 $\angle A=\alpha$ 爲準證明。令 $\triangle ABC$ 外接圓的半徑爲 r。若 α 爲銳角, 從 C 作該圓的直徑和圓在 D 相交 (圖 5(a)), A 和 D 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 同側, 因此 $\angle BDC=\alpha$, 於是從直角三角形 $\angle CBD$ 得到 $\sin(\alpha)=\sin(\angle BDC)=\frac{a}{2r}$。



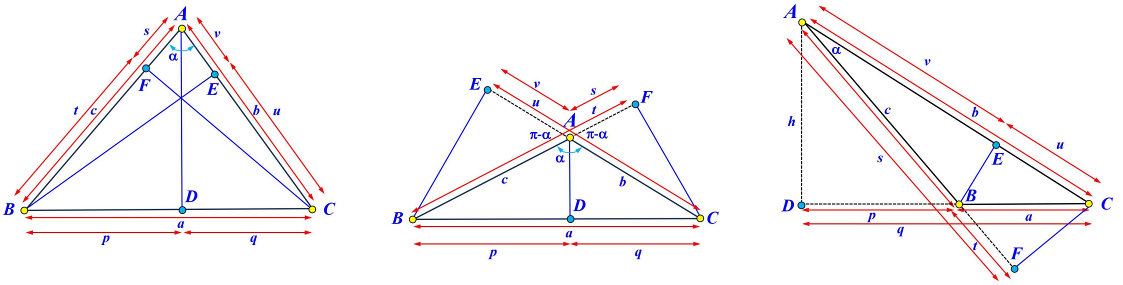
(a) 銳角　　(b) 鈍角

圖 5: 正弦定律

若 α 爲鈍角, A 和 D 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 異側而且 $\alpha+\angle CDB=180°$ (圖 5(b))。由直角三角形 $\angle CBD$ 得到 $\sin(\alpha)=\sin(180°-\angle CDB)=\sin(\angle CDB)=\frac{a}{2r}$。綜合起來, $\frac{a}{\sin(\alpha)}=2r$ 是個常數 (外接圓的直徑長); 其它兩個角同理可證, 這樣就證明了正弦定律。

7. 餘弦定律

我們曾經用歐基里德剪刀證明了餘弦定律 [16], 本節不使用畢氏定理再度證明餘弦定律。正弦定律和餘弦定律, 在使用畢氏等式的前提下是互通的; 我們可以用餘弦定律導出正弦定律 [4]、用正弦定律證明餘弦定律 [5]、更可以同時導出兩者 [6]。因爲本文的主旨是在不用畢氏定理和畢氏等式導出許多三角學的重要式子, 所以不會觸碰這個問題, 有興趣的讀者請參看原文。下面第 7.1 節討論直接用三角學的簡單證明, 第 7.2 節和第 7.3 節分別討論兩個無字證明, 第 7.2 節用到相交弦和相交割線定理 (兩者的證明都不需要用到畢氏定理), 第 7.3 節則是用拼圖方式、也得到一個很簡捷的畢氏定理證明。



(a) 全銳角　　(b) A 爲鈍角　　(c) 有一個鈍角

圖 6: 餘弦定律的純三角學證明

7.1. 直接用三角學的簡單證明

此地討論兩個簡單的證明。第一個證明是 Thompson 在 1951 年做的 [17], 觀念和幾何原本中的 II.12 和 II.13 差不多, 也就是 (1) 三角形全是銳角, (2) 選定的角是鈍角, 和 (3) 選定的角是銳角但三角形有鈍角。先看全銳角的情況 (圖 6(a))。我們用 α、β 和 γ 表示在 A、B 和 C 的角。於是很容易看出以下的結果:

$$
\begin{aligned}
a &= p+q = c\cdot\cos(\beta)+b\cdot\cos(\gamma),\\
b &= u+v = a\cdot\cos(\gamma)+c\cdot\cos(\alpha),\\
c &= s+t = b\cdot\cos(\alpha)+a\cdot\cos(\beta).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Thompson 反覆地使用上面的式子證明餘弦定律如下:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= a\cdot a = a(p+q) = a(c\cdot\cos(\beta)+b\cdot\cos(\gamma))\\
&= c(a\cdot\cos(\beta))+b(a\cdot\cos(\gamma)) = c\cdot t+b\cdot u\\
&= c(c-s)+b(b-v) = b^2+c^2-(b\cdot v+c\cdot s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= b^2 + c^2 - (b\cdot(c\cdot\cos(\alpha)) + c\cdot(b\cdot\cos(\alpha)))\\
&= b^2 + c^2 - 2b\cdot c\cdot\cos(\alpha).
\end{aligned}
$$

若 α 是鈍角 (情況 (2)), 垂足 E 和 F 在 $\triangle ABC$ 之外 (圖 6(b)), 於是:

$$
\begin{aligned}
t &= c + s = c + b\cdot\cos(180^\circ - \alpha) = c - b\cdot\cos(\alpha),\\
u &= b + v = b + c\cdot\cos(180^\circ - \alpha) = b - c\cdot\cos(\alpha).
\end{aligned}
$$

這樣我們得到下式, 餘弦定律仍然成立:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= a\cdot a = a(p+q) = a(c\cdot\cos(\beta) + b\cdot\cos(\gamma))\\
&= c(a\cdot\cos(\beta)) + b(a\cdot\cos(\gamma)) = c\cdot t + b\cdot u\\
&= c(c+s) + b(b+v) = b^2 + c^2 + (b\cdot v + c\cdot s)\\
&= b^2 + c^2 + (b\cdot(-c\cdot\cos(\alpha)) + c\cdot(-b\cdot\cos(\alpha)))\\
&= b^2 + c^2 - 2b\cdot c\cdot\cos(\alpha).
\end{aligned}
$$

若 α 是銳角但三角形有鈍角 (圖 6(c))。相同手法我們得到:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= a\cdot a = a(q-p) = a(b\cdot\cos(\gamma) - c\cdot\cos(180^\circ - \beta))\\
&= b(a\cdot\cos(\gamma)) - c(a\cdot\cos(180^\circ - \beta))\\
&= b\cdot u - c\cdot t = b(b-v) - c(s-c) = b^2 + c^2 - (b\cdot v + c\cdot s)\\
&= b^2 + c^2 - (b(c\cdot\cos(\alpha)) + c(b\cdot\cos(\alpha)))\\
&= b^2 + c^2 - 2b\cdot c\cdot\cos(\alpha).
\end{aligned}
$$

所以在所有的情況下餘弦定律都爲真。

Thompson 的證明手法在他之前和之後都被人一再使用。Molokach 在六十多年後發表了一個簡捷的證明 [13], 這個證明仍然從式子 (5) 出發, 依舊分成三個情況、但簡化了很多。先看全銳角的情況 (圖 6(a))。在全銳角情況下, 把式子 (5) 的第一式乘 a、第二式乘 b、第三式乘 c 得到:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= a\cdot c\cdot\cos(\beta) + a\cdot b\cdot\cos(\gamma),\\
b^2 &= b\cdot a\cdot\cos(\gamma) + b\cdot c\cdot\cos(\alpha),\\
c^2 &= c\cdot b\cdot\cos(\alpha) + c\cdot a\cdot\cos(\beta).
\end{aligned}
$$

然後計算 $b^2 + c^2 - a^2$ 得到:

$$
b^2 + c^2 - a^2 = (b\cdot a\cdot\cos(\gamma) + b\cdot c\cdot\cos(\alpha)) + (c\cdot b\cdot\cos(\alpha) + c\cdot a\cdot\cos(\beta))
$$

$$
\begin{aligned}
&-(a\cdot c\cdot\cos(\beta)+a\cdot b\cdot\cos(\gamma))\\
=\ &2b\cdot c\cdot\cos(\alpha).
\end{aligned}
$$

這樣就證明了全銳角的情況。在 α 是鈍角的情況下 (圖 6(b)), 我們有:

$$
\begin{aligned}
a&=p+q=c\cdot\cos(\beta)+b\cdot\cos(\gamma),\\
b&=u-v=a\cdot\cos(\gamma)-c\cdot\cos(180^\circ-\alpha)=a\cdot\cos(\gamma)+c\cdot\cos(\alpha),\\
c&=t-s=a\cos(\beta)-b\cdot\cos(180^\circ-\alpha)=a\cdot\cos(\beta)+b\cdot\cos(\alpha).
\end{aligned}
$$

所以 a、b 和 c 的式子完全相同。最後, 若 α 是銳角但 β 是鈍角時 (圖 6(c)), a、b 和 c 的三道式子仍舊不變:

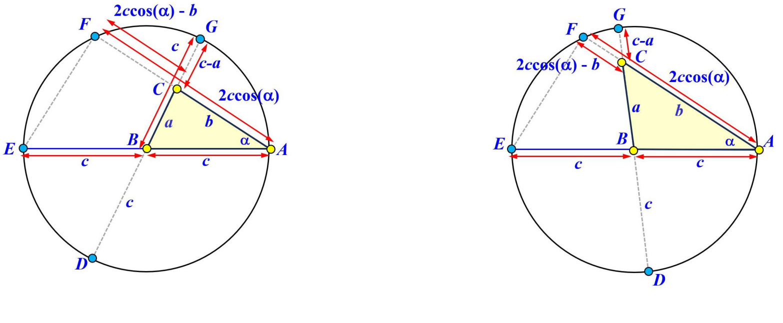
$$
\begin{aligned}
a&=q-p=b\cdot\cos(\gamma)-c\cdot\cos(180^\circ-\beta)=b\cdot\cos(\gamma)+c\cdot\cos(\beta),\\
b&=u+v=a\cdot\cos(\gamma)+c\cdot\cos(\alpha),\\
c&=s-t=b\cdot\cos(\alpha)-a\cdot\cos(180^\circ-\beta)=b\cdot\cos(\alpha)+a\cdot\cos(\beta).
\end{aligned}
$$

這樣, 我們就很簡捷地證明了餘弦定律。

7.2. 無字證明之一

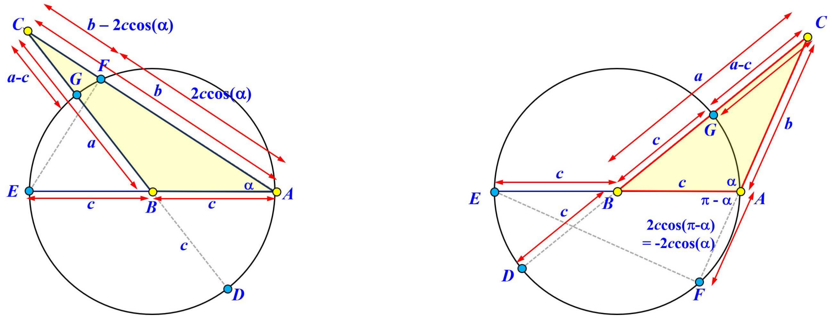
本系列的第一篇中談到無字證明 [15], 並且指出無字證明通常展示一個圖而少有文字說明, 而且通常只會有最簡單的情況。本節討論一個無字證明、但補全缺少的部分。

Sidney H. Kung 在 1992 年發表一個很有趣、不用畢氏定理的證明 [9]。用 B 爲圓心、c 爲半徑作一個圓, 依著 C 是否在圓內和 α 是否爲銳角, 我們有四種情況。圖 7 是 C 在圓內的兩個情況。令 $\overleftrightarrow{BC}$ 和圓在 D 和 G 相交, D 是在 $\triangle ABC$ 另一邊。延長 $\overleftrightarrow{AB}$ 和圓在 E 相交, 於是 $\overline{DG}$ 和 $\overline{AE}$ 是該圓的直徑, 而且 $\overline{CG}=c-a$ 和 $\overline{CD}=a+c$。令 $\overleftrightarrow{AC}$ 和圓



(a)　　(b)

圖 7: Sidney H. Kung 的證明: C 在圓內



(a) (b)

圖 8: Sidney H. Kung 的證明: C 在圓外

在 F 相交, 於是 $\triangle AEF$ 是個直角三角形, 所以 $\overline{AF} = \overline{AE}\cdot\cos(\alpha) = 2c\cdot\cos(\alpha)$, 而且 $\overline{CF} = 2c\cdot\cos(\alpha) - b$。相交弦定理 (Intersecting Chords Theorem) 告訴我們 $\overline{CG}\cdot\overline{CD} = \overline{CA}\cdot\overline{CF}$, 於是 $(c-a)(c+a) = b\cdot(2c\cdot\cos(\alpha)-b)$, 這就得到餘弦定律。若 C 在圓外, 圖 8(a) 是 α 爲銳角、圖 8(b) 是 α 爲鈍角。若 α 爲銳角, 相交割線定理 (Intersecting Secants Theorem) 指出 $\overline{CF}\cdot\overline{CA} = \overline{CG}\cdot\overline{CD}$, 也就是 $(a-c)(a+c) = b(b-2c\cdot\cos(\alpha))$。

若 α 爲鈍角 (圖 8(b)), 因爲 $\triangle AEF$ 爲直角三角形而 $\angle EAF = 180^\circ - \alpha$, 因此 $\overline{AF} = \overline{AE}\cdot\cos(180^\circ-\alpha) = -2c\cdot\cos(\alpha)$。相交割線定理指出 $\overline{CA}\cdot\overline{CF} = \overline{CG}\cdot\overline{CD}$, 也就是 $(a-c)(a+c) = b(b-2c\cdot\cos(\alpha))$, 這就得到了餘弦定律。

7.3. 無字證明之二

本節討論第二個無字證明, 它是完整的。筆者不知道原作者是誰, 而是在 Bogomolny 的網站上看到的 [2], 筆者也在他處看到過這個證明。

先看 α 爲銳角的情況。圖 9 最上方的白色三角形爲已知的三角形。我們把這個三角形向下翻轉使 a 邊在上方, 再把三邊都放大 a 倍 (於是三邊長爲 a^2、$a\cdot b$ 和 $c\cdot a$), 這是否有一點像 7.1 節中 Thompson 和 Molokach 證明的味道呢? 請注意到圖中的標示。接著, 旋轉三角形使 c 在下方 (圖 9 左側)、再把三邊放大 c 倍, 這樣三邊長爲 c^2、$c\cdot a$ 和 $c\cdot b$。如此一來, 這個放大後的三角形和翻轉後的三角形有一個一樣的邊長 $c\cdot a$。我們把這兩者湊在一起, 請注意到三個角的位置。最後, 旋轉三角形使 b 在下方、再放大 b 倍, 三邊長爲 b^2、$a\cdot b$ 和 $b\cdot c$ (圖右側)。這個旋轉和放大後的三角形與第一個三角形有一相同邊長爲 $a\cdot b$ 的邊, 因此把它湊過去就得到一個等腰梯形 (腰長爲 $b\cdot c$)。不但如此, 梯形頂邊長爲 a^2、底邊長爲 b^2+c^2。從梯形兩個頂點向底邊做垂線, 令垂足到梯形底邊最近的頂點的距離爲 d。從斜邊爲 $b\cdot c$ 直角邊爲 d 的直角三角形得到 $d = b\cdot c\cdot\cos(\alpha)$, 這樣我們就得到 $a^2 = b^2+c^2-2d = b^2+c^2-2b\cdot c\cdot\cos(\alpha)$。

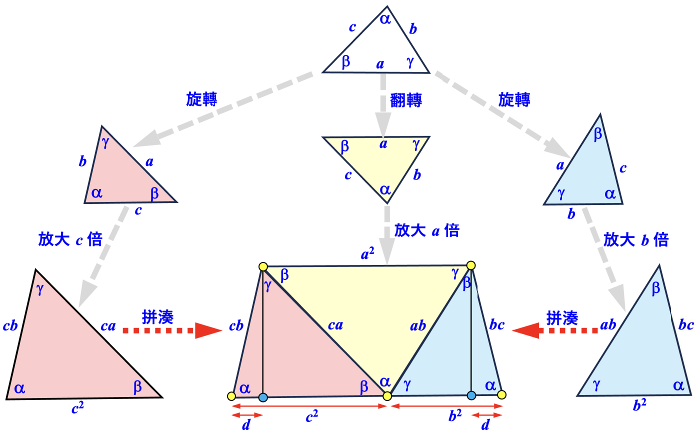


圖 9: 拼圖式證明: 銳角

α 爲鈍角的情況 (圖 10) 和銳角的情況一樣, 只是等腰梯形頂邊比底邊長, 因此 $b^2+c^2+2d=a^2$。因爲 $d=b\cdot c\cdot\cos(\beta+\gamma)=b\cdot c\cdot\cos(180^\circ-\alpha)=-b\cdot c\cdot\cos(\alpha)$, 我們仍舊得到餘弦定律。

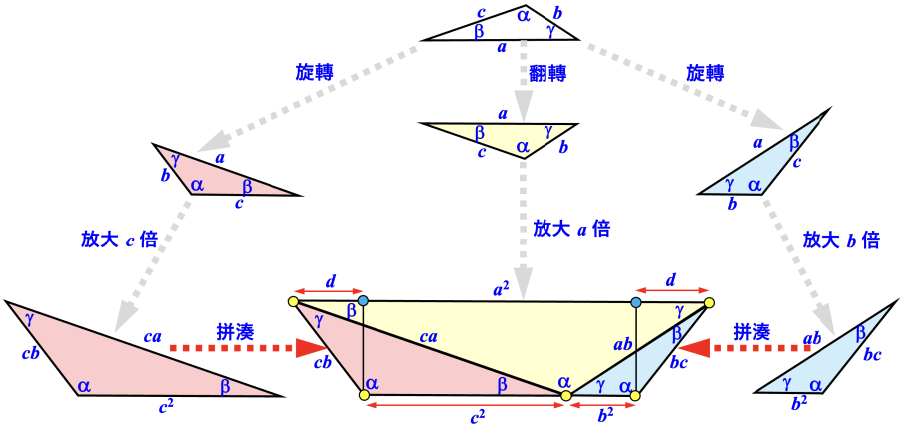


圖 10: 拼圖式證明: 鈍角

上面的拼圖式證明提供了一個類似的畢氏定理無字證明。若直角三角形三邊爲 a、b 和 c, 它們的對角爲 $\alpha=90^\circ$、β 和 γ。把直角三角形以斜邊 a 爲比例因子放大 a 倍, 於是三邊長爲 aa、ab 和 ac, 圖 11 中藍色字爲原邊長、黑色字爲比例因子。過直角頂作和斜邊平行的直線, 再從非直角頂點向該線作垂線, 於是兩個垂足和直角三角形非直角頂點構成一個長方形。請注意到這個長方形內一共有三個相似的直角三角形, 左邊那個可以視爲原三角形放大 c 倍, 右邊的則是放大了 b 倍。因此, 長方形上方邊長爲 b^2+c^2, 下方邊長爲 a^2, 兩者相等 (因爲是長

方形), 於是畢氏定理得證。

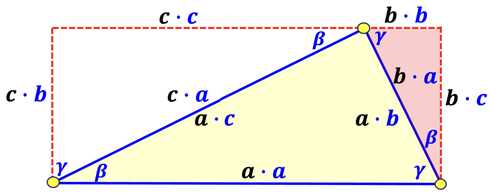


圖 11: 拼圖式證明: 畢氏定理

8. 正切定律

正切定律不是三角學課本中常見的課題, 但值得在此討論維持完整性。若三角形三邊爲 a、b 和 c, 對角爲 α、β 和 γ, 任取兩邊 (譬如 a 和 b), 正切定律就是下式:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

正切定律很容易用正弦定律加上和化積等式證明, 讀者不妨一試, 但是用 Mollweide 等式的證明更直接。回顧第 5 節的 Mollweide 等式:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \quad 和 \quad \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

若用第二式去除第一式, 我們立即得到下面的結果:

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{a+b}&=\frac{\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\right)}{\left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\right)}=\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\\&=\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{180^\circ-(\alpha+\beta)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ-(\alpha+\beta)}{2}\right)}=\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\\&=\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.\end{aligned}$$

9. 另闢蹊徑

筆者大三時系內有一位美國來的訪問教授 Anderson, 他喜歡和同學聊天, 聊天時建議筆者看一本薄書: Artin 的 *Gamma Function* [1], 並且鼓勵筆者把書看完再聊天。Artin 的這本書並不難讀、但要查不少資料。看完書後找 Anderson 教授聊天, 他給了筆者一個「不很難」

的題目: Artin 把 Gamma 函數特性化, 那麼三角函數 (特別是正弦函數和餘弦函數) 呢? 大約一到兩天後筆者告訴 Anderson 教授, 題目解出來了, 用的是線性微分方程式。他說, 這是他期望的結果, 然而希望看到一個不用微分方程式的初等解答、可以加上額外的條件、只是不要太過複雜。

找出解答的時間長了一些, 但是有點複雜 [14]。在做這個題目時筆者正在修習一般拓樸學, 課中提到稠密集合 (Dense Set)、以及稠密集合在 Hausdorff 空間上的應用。這個觀念給了最後臨門一腳把答案做出來, 本節就用稠密集合的觀念證明畢氏等式。

9.1. sin( ) 和 cos( ) 為連續函數

使用稠密集合時需要連續函數的觀念, 我們必須在證明 sin( ) 和 cos( ) 爲連續時不用畢氏定理或畢氏等式。首先, 我們需要一個很簡單的結果: 當 $x > 0$ 很小時, $\sin(x) < x$。證明十分簡單, 請看圖 12。若單位圓圓心爲 O、$\overline{OC} = 1$ 爲半徑、$\angle COA = x$, A 和 C 之間的弧長就是 x。令從 A 到 $\overleftrightarrow{OC}$ 的垂足爲 B, 因此 $\overline{AB} = \sin(x)$。因爲 $\overline{AB}$ 是直角三角形的直角邊, 它小於斜邊 $\overline{AC}$, 而 $\overline{AC}$ 是圓的弦、它小於 A 和 C 之間的弧 x (直線是兩點間的最短距離), 這樣就證明了 $\sin(x) < x$。

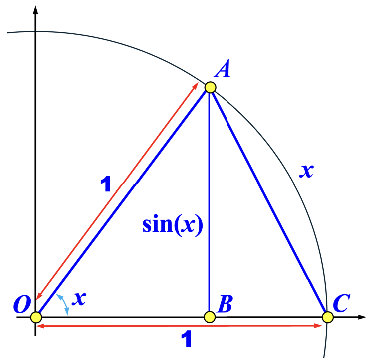


圖 12: $\sin(x) < x$

我們用 $\epsilon - \delta$ 方式證明餘弦函數爲連續。給定 $\epsilon > 0$, 令 $\delta = \epsilon$, 對任意 a 而言, 若 $|x - a| < \delta$, 透過和化積等式得到

$$\begin{aligned}|\cos(x) - \cos(a)| &= \left|-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \\ &\leq 2 \cdot 1 \cdot \left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| < 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a| < \delta = \epsilon.\end{aligned}$$

這樣就證明了 $\cos(x)$ 爲連續函數。因爲 $\sin(x) = \cos\left(90^\circ - x\right)$, 所以 $\sin(x)$ 也是連續函數, 當然 $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ 也是連續函數。

9.2. 稠密集合

若 D 是某拓樸空間中的集合, 如果該拓樸空間中每一個開集合都有 D 中的元素, 我們就說 D 在該拓樸空間中是稠密 (dense) 的。實數線是個拓樸空間, 有理數集合和無理數集合在實數線上都是稠密的, 因爲任何開區間中都會包含了有理數和無理數。

一個 Hausdorff 空間 (也叫做 T_2 空間) 指的是任何兩個點都各自會有包含它們、但卻分離的開集合。實數線是一個 Hausdorff 空間, 因爲給定任何實數 a 與 b, 令 $\delta=\frac{|a-b|}{n}$ $(n>2)$, 於是 $(a-\delta,a+\delta)$ 和 $(b-\delta,b+\delta)$ 就是分離而且分別包含了 a 和 b 的開區間。在一般拓樸學課本中多半有如下的一個定理 (或習題), 見 Willard [18, p. 89]。

> *若 D 是拓樸空間 X 中的一個稠密子集合, h 和 $k: X\to Y$ 是連續函數, Y 是 Hausdorff 空間。若 h 和 k 在 D 上相同, 則 $h=k$。簡單地說, 若 $h|_D=k|_D$, 則 $h=k$。*

對實數線而言, 上述的結果其實並不是什麼艱難的事。考慮不在 D 中的一個點 x, 若 $h(x)\neq k(x)$, 我們可以選定足夠小的 ϵ 使得 $I_1=(h(x)-\epsilon,h(x)+\epsilon)$ 和 $I_2=(k(x)-\epsilon,k(x)+\epsilon)$ 沒有交集。考慮 $h^{-1}(I_1)\cap k^{-1}(I_2)$, 它包含了 x、而且因爲 I_1 和 I_2 都是開區間, $h^{-1}(I_1)\cap k^{-1}(I_2)$ 也是開區間, 於是必有 D 的一個點 y, 但是 $h(y)$ 屬於 I_1、$k(y)$ 屬於 I_2, 這是兩個不相交的集合, $h(y)\neq k(y)$, 違反了題設。

9.3. 用稠密集合證明畢氏等式

我們只需要證明在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 中 $f(x)=\sin^2(x)+\cos^2(x)$ 爲 1 就行, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 之外的部分可以透過 $\sin(x)$ 和 $\cos(x)$ 的週期性和對稱性推導出來。首先, 很明顯地 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$。這樣, 我們就只需要證明 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上爲 1。令 $g(x)=1$, 它是個連續函數, 我們要做的是在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 中找出一個稠密集合 D 使得 $f|_D=g|_D$, 這樣 $f(x)=1$ 就成立了。

回顧在第 1 節的式子 (3)。我們用 $\frac{\pi}{2}$ 代入得到:

$$1=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)=\cdots=\sin^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=\cdots.$$

這表示對 $n>0$ 而言, 畢氏等式對 $\frac{\pi}{2}$、$\frac{\pi}{2^2}$、$\ldots$、$\frac{\pi}{2^n}$、$\ldots$ 成立。再回到角和與角差等式:

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y) \quad 和 \quad \cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y).$$

把他們平方後相加得到:

$$\sin^2(x+y)+\cos^2(x+y)=\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)\left(\sin^2(y)+\cos^2(y)\right).$$

用數學歸納法可以證明下式, 此地 x_1、x_2、$\ldots$、x_n 爲已知的角:

$$\sin^2\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)+\cos^2\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)=\prod_{i=1}^n\left(\sin^2(x_i)+\cos^2(x_i)\right).$$

若這些角全都相等, 我們有:

$$\sin^2(nx)+\cos^2(nx)=\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)^n. \tag{6}$$

爲了方便起見, 我們用 $S\cdot t$ 表示把集合S中的每一個元素都乘上 t。定義一系列的集合 $D_1\subseteq D_2\subseteq\cdots\subseteq D_n\subseteq\cdots$ 如下:

$$\begin{aligned}
D_1&=\left\{\frac{1}{2}\right\}\cdot\frac{\pi}{2}\\
D_2&=\left\{\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^2},\frac{3}{2^2}\right\}\cdot\frac{\pi}{2}\\
D_3&=\left\{\frac{1}{2^3},\frac{2}{2^3},\ldots,\frac{7}{2^3}\right\}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&\vdots\\
D_n&=\left\{\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\ldots,\frac{2^n-1}{2^n}\right\}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

令 $D=\cup_{i=1}^{\infty}D_i$, 很明顯地 D 是在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 中的一個稠密集合, 因爲給定任何開區間 (c,d), 讓 n 足夠大, 就會有兩個 D_n 中相鄰的元素落在 (c,d) 中。

D_n 中的第一個元素 $\left(\frac{1}{2^n}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$ 讓畢氏等式成立; 再由式子 (6), 這第一個元素的倍數也讓畢氏等式成立, 於是 D_n 的所有元素對畢氏等式爲真, 當然 D 也如此。這表示 $f|_D=g|_D$, 於是 $f=g$, 所以畢氏等式在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 爲真, 結果得證。

10. 結論

本文不用畢氏定理和畢氏等式證明了一些重要的三角學式子, 這反證了 Loomis 的大膽說法, 而且這些重要的三角學式子都可以導出畢氏等式或畢氏定理。譬如說, 用和化積等式有一個證明 (第 2 節); 倍角等式固然沒有導出畢氏等式, 但提供了非常有用的結果 (式子 (3) 和 (4)); 半角等式可以簡單地證明畢氏等式 (第 4 節);Mollweide 等式不但可以直接證明畢氏定理, 其中使用的手法更提供了兩個極爲簡潔的證明 (第 5.4 節); 餘弦定律 (第 7 節) 討論四個不同的證明, 兩個直接使用三角學、兩個使用幾何學, 其中一個化簡後得到顯而易見的畢氏定理證明 (第 7.3 節); 最後, 透過連續函數和稠密集合的概念, 拓樸學的手法也在三角學的範疇中證明了畢氏等式 (第 9 節)。

總之, Loomis 這本書正面的最大貢獻就是收集了二十世紀前半段很多畢氏定理的證明, 但反面的效果卻是讓很多人相信畢氏等式是不能用三角學證明的, 因爲「所有三角學的基本式子都是基於畢氏定理爲真而得, 於是有畢氏定理才會有三角學。」Loomis 的說法在國內似乎不甚流行, 但是用確實的證據說明 Loomis 的講法是錯的是我輩的責任, 背景資訊請看本系列第

一篇的說明 [15]。或許有人會說, 本文有些證明 (譬如使用稠密集合) 可能矯枉過正, 但是筆者相信數學雖然並不完美、也無法證明自身的調和性 (請看 Gödel 的兩個不完整定理), 但透過證明的多樣性、做到條條大路通羅馬倒是可以有益讀者的, 各位以爲然否?

後記

本文第 9 節中使用的技巧曾經用來證明滿足某些條件的連續函數就是正弦函數和餘弦函數 [14], 不過因爲該解答很複雜也不優雅, 所以幾十年下來沒有發表這個解法的意願。不過, 第 9 節的內容已經寫成專業論文、並且投稿, 特此聲明並沒有文字回收 (text recycling) 的問題 [7]。

參考文獻

1. Emil Artin, *The Gamma Function*, translated by Michael Butler, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964 (Dover Edition, 2015).
2. Alexander Bogomolny, The Law of Cosines (Independent of the Pythagorean Theorem), *Cut the Knot*, available at `https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/CosineLawAB.shtml` (retrieved March 16, 2024).
3. Augustus de Morgan, *Trigonometry and Double Algebra*, Cambridge University Press, London, 1849 note = "Available at `https://archive.org/details/bub_gb_7UwEAAAAQAAJ/page/n5/mode/2up`"
4. Angelo S. DiDomenico, A Trigonometric Exploration, *The Mathematics Teacher*, Vol. 85 (1992), No. 7 (October), pp. 582-583.
5. Angelo S. DiDomenico, The Law of Cosines from the Law of Sines, *The Mathematics Teacher*, Vol. 86 (1993), No. 5 (May), p. 422.
6. Angelo S. DiDomenico, Sines and Cosines – Simultaneously! *The Mathematics Teacher*, Vol. 89 (1996), No. 3 (March), p. 201.
7. Susanne Hall, Cary Moskovitz and Michael Pemberton, Understanding Text Recycling, Text Recycling Research Project, V.1, June 2021. (`https://textrecycling.org/files/2021/06/Understanding-Text-Recycling_A-Guide-for-Researchers-V.1.pdf`).
8. Natanael Karjanto, Mollweide's formula in teaching trigonometry, *Teaching Mathematics and Its Applications*, Vol. 30 (2011), pp. 70-74. (網址: `https://arxiv.org/pdf/1808.08049`)
9. Sidney H. Kung, Proof without Words: The Law of Cosines, *Mathematics Magazine*, Vol. 63 (1990), No. 5 (December), p. 342.
10. Zsolt Lengvárszky, The Pythagorean Theorem and the Angle Sum and Difference Identities, *Mathematics Magazine*, Vol. 91 (2018), No. 5 (December), pp. 380-381.
11. Elisha Scott Loomis, *The Pythagorean Proposition*, 2nd edition, The National Council of Teachers of Mathematics, 1940. 網上可以找到 PDF 版, 這個連結是一種可能: `https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf`, 網上也有 1927 年第一版 (見 `https://`

personal.math.ubc.ca/~cass/Euclid/java/html/L.pdf), 但第二版參考價值較高。
12. Karl Brandan Mollweide, Zusätze zur ebenen und sphärischen Trigonometrie, *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels- Kunde*, Vol. 18 (1808), pp. 394-400.
13. John Molokach, Law of Cosines – A Proof without Words, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 121 (2014), No. 8 (October), p. 722.
14. 冼鏡光。沈思集: Characterization of Trigonometric Functions。《淡江數學》, Vol. 4 (1969), pp. 35-39。
15. 冼鏡光。畢氏定理的三角學證明: I, 一個傳了近百年的錯誤說法和近來的發展。數學傳播季刊, 49(4), 56-72, 2025。
16. 冼鏡光。畢氏定理的三角學證明: II, 畢氏定理:《幾何原本》中究竟證明了什麼? 數學傳播季刊, 50(1), 26-42, 2026。
17. S. L. Thompson, Note on the Law of Cosines, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 58 (1951), No. 10 (December), pp. 698-699.
18. Stephen Willard, *General Topology*, Dover, 2004.
19. Rex H. Wu, The Story of Mollweide and Some Trigonometric Identities, February 10, 2007 https://www.geocities.ws/galois_e/pdf/mollweide%20article.pdf.

—本文作者爲美國密西根理工大學計算機科學系名譽教授—